3.5　力学的エネルギー保存則の応用

　ポテンシャルの形と全体の力学的エネルギーが与えられれば、エネルギー保存則を使うことにより、運動方程式を解くのが困難な場合でも定性的な運動の様子がわかる。本節では、この方法で１次元の運動を解析する方法について述べる。

3.5.1 １次元調和振動子の場合

　１次元調和振動子は、運動方程式も簡単に解け、その解もよくわかっているので、ポテンシャルから出発して運動の様子を調べる方法を述べるには都合が良い。

　力学的エネルギー(E)は、運動エネルギー(T)とポテンシャルエネルギー（U）の和であるが、初期条件で E が決まれば、運動の間、常にその値は保存する（エネルギー保存則）。

　今、x 軸上での１次元の運動を考えると、

$$E = T(x) + U(x) = \mathrm{const.} \qquad (3\text{-}5\text{-}1)$$

と書ける。ここで、$T(x), U(x)$ は、質点の座標 x での運動エネルギーとポテンシャルである。また、「const.」は constant の略で一定という意味。

　質点の質量が m 、ばね定数が k の１次元調和振動子の場合、$T(x), U(x)$ は、

$$T(x) = \frac{1}{2}mv^2 \text{、} U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (3\text{-}5\text{-}2)$$

であるから、E は、

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \mathrm{const.} \qquad (3\text{-}5\text{-}3)$$

となる。

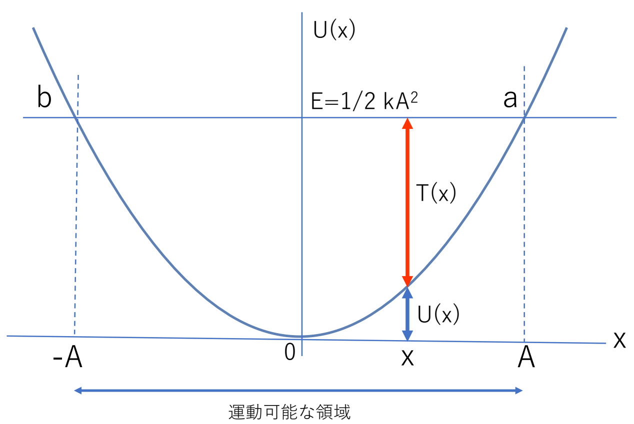
　この調和振動子のポテンシャル $U(x) = \dfrac{1}{2}kx^2$ （放物線）の図を右下に示した。この図を見ながら、この運動について調べていく。

　今、質点をバネの自然長の位置（x=0)からx=A点まで運び、そこで静かに手を離したとする(v=0)。すると、その点でのTは０なのでA点でのEはA点でのポテンシャル $U(A)$ と同じになる。

その後、Eは運動中、どの点でも常に同じ値を持つことになる。

$$E = U(A) = \frac{1}{2}kA^2 \qquad (3\text{-}5\text{-}4)$$

これを示すため、図の中に、x軸と平行で縦軸の値が常に$\frac{1}{2}kA^2$になるような直線(ba)を記した。



さて、質点が、x＝Aから原点の方へ向かって運動したとしよう。その途中の任意の点xでは、そのTとUの大きさ（比）は図からすぐに読み取れる。すなわち、xが減少するにつれ、Tは増大しUは減少していく。x＝０でTは最大、U=0になった後、x＜０側に行くと、Tは減少に転じ、Uは増大していく。$U = \frac{1}{2}kA^2$ になる点(x=-A)で T=0となる。

これらのことから何がわかるか、以下にまとめる。

(1)　運動可能な範囲と質点の速度（運動エネルギーによる解析）

$T(x) = \frac{1}{2}mv^2$ であるから

$T(x) = 0$ 、　$v = 0$ **静止する点**、

$T(x) > 0$ 、　$v \neq 0$ であるから、**運動可能な領域、Tが大きいほど速度も大きい**　　(3-5-5)

$T(x) < 0$、　v が虚数になってしまい、**運動が禁止されている領域**

なることが一般的に言える。もし、全エネルギーEの直線とポテンシャルが2点で交点を持ち、その間でE > U (T>0)ならば、粒子はその2点間の間に閉じ込められた運動をする（一般には振動）だろう[1]。

これを１次元調和振動子に適用して見る。まず、前頁の図より、運動が許される領域は $-A \leq x \leq +A$ であることがわかる。その外の領域ではTが負になるため運動は不可能で、質点は $-A \leq x \leq +A$ の領域に閉じ込められている。次に、質点の速度について見ると、x=AではT＝０なので静止しているが、xを小さくしていくとTは大きくなるので速度は次第に増し、Tが最大になるx=0で一番速く、x<0では減速して、x=-Aで再び静止することがわかる。x=0での速度は、その点で $E = T$ であるから　$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2$ から$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}A$ と求まる。

(2) 力の向きと大きさ（ポテンシャルの傾きの解析）

１次元では、ポテンシャルと力には(3-4-7)式より、

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \qquad \text{(3-5-6)}$$

の関係があった。幾何学的には $U(x)$ の曲線の傾きが大きい（急傾斜である）ほど力は大きいことが一般的に言える。また、傾きが０であれば力も０となる。

(3-5-6)式には負の符号がついていることに注意しよう。ポテンシャルの傾きが正であれば、力はx軸上で負の方を向いているし、傾きが負であれば、力はx軸上で正の方を向いている。

これを１次元調和振動子に適用すると、前頁の図より、ポテンシャルがx=0で極小になることから傾きは０となり、力も０となる（実際、原点はバネが自然長の位置である）。x＞０の領域では、傾きは常に正で、原点より離れるほど傾きは急になるから、x>0 で力の向きは常に負（原点側を向いている）で、原点より離れるほど力の大きさは大きくなっていく。x＜０の領域では逆になり、傾きが常に負なので、力の向きは常に正（やはり原点側を向いている）で、原点よ

---

[1] 束縛状態とも言う。

り離れるほど力の大きさは大きくなっていく。こうして、原点より離れると、力は常に原点向きに発生し、その大きさは、離れるほど大きくなっていく（これは「復元力」と言えるだろう）。

前ページに示された図のポテンシャルの形から読み取った１次元調和振動子の運動をまとめるため、再度、運動をx＝Aの点から順に追っていくことにする。x＝Aの点では、静止しているが、力は負の方向に働いているため、質点はx軸負の向きに加速され始める。Tは増加するため、速さは増え続け、Tが最大である　x＝０で速さも最大になる。x＜０の領域に入るとポテンシャルの傾きが変わり、力は正の向きに働き始める。これにより次第に減速されていく。そのことはx＜０でTが次第に小さくなることからわかる。そして、x＝ーAでT=0となり静止する。しかし、その点で、力は正の向きに向いているため、質点は正の向きに加速され始める。原点で最大の速度を持った後、x>0ではポテンシャルの傾きが変わり、力は負の向きに働き始めるので、減速し始め、x=Aで再度静止することになる。これ以降は、同じことが繰り返されるので、粒子は $-A \le x \le +A$ の領域に閉じ込められ（束縛され）、周期的な運動（振動）をすることがわかる。

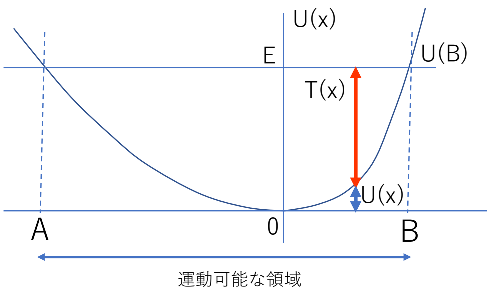
この時点では「単振動」とまではわからない。(3-5-6)式を計算すると、復元力がフックの法則に従う ($F(x) = -kx$ （常に傾きが kx))ので、単振動であることがわかる。逆に、力と裏腹の関係にあるポテンシャル$U(x)$がxの２乗の関数の時、単振動をすると言っても良いだろう。

3.5.2 一般的なポテンシャルの形の場合

１次元調和振動子の問題は、運動方程式が簡単に解ける。だが、もし１次元のポテンシャルの形が放物線から多少ずれている場合とか、正負で非対称の形をしている、とか、もっと複雑な形をしている場合、もはや運動方程式を解くのは著しく困難になるだろう。しかし、ポテンシャルが放物線から少しずれただけで、単振動から大きく変わった運動になってしまうものであろうか？　高度な数学を駆使した解析や、コンピューターを使い数値計算で求めなければ、この答えは出せないのであろうか？　そのような計算を実際に実行するにせよ、その前に、どんな運動をするのか定性的にでも知っておくことは、見通しをよくするために重要なことである。**3-5-1節(1)(2)で述べたことは、こうした一般的なポテンシャルの形にも適用できるのである。**

例として、x＞０とx＜０で非対称な形の１次元ポテンシャルの場合（下図）を見てみよう。調和振動子の場合と同様に、最初、質点を原点からB点まで運んで静かに手を離したとする。その時のポテンシャル $U(B)$ が全力学的エネルギー E となる。調和振動子の場合と同様に、任意の点xでは(3-5-1)式が成り立つ。

3-5-1節の考え方を使うと、T＝０の点はx=Aとx=B　(EとU(x)の交点）なので、x=A、Bでは質点は静止。A<x<Bの範囲でT>0となるから、静止する点も含め、運動可能な領域は $A \le x \le B$ となり、この区間に粒子は束縛される。



運動をx＝Bの点から追っていく。x＝Bでは、静止しているが、Uの傾きが正のため、力は負の方向に働いている。このため、質点はx軸負の向きに加速され始める。Tは増加するため、速度は増え続け、Tが最大であるx＝０で速度も最大になる。x＜０の領域に入るとポテンシャルの傾きが変わり、力は正の向きに働き始める（こうして、常に力は原点方向を向くので、このポテンシャルの場合も復元力になっている。しかし、ポテンシャルの形がx^2とは限らないので力はフックの法則には従わないし、正負の領域でFの大きさの変化も異なるだろう）。x＜０の領域では、こうして次第に減速されていく。これは、x＜０でTが次第に小さくなることからもわかる。そして、x＝AでT=0となり静止する。しかし、その点で、力は正の向きに向いているため、質点は正の向きに加速され始める。こうして反転した質点は、上と同様な経過をたどり再度x＝B点にたどり着くが、そのあとは、同じことが周期的に繰り返されるので、調和振動子と同様、やはり振動することがわかる。ただし、当然、単振動ではない。調和振動子と異なりポテンシャルの形は非対称なので、前のページの図の場合、x＜０での減速や加速はx＞

０の時よりゆっくりと生じる。それは、Uのx＜０での傾きがx＞０より緩やかに変化するからである（あるいは、Tの増減がx＜０側で緩やかになる）。

結局、ポテンシャルの谷の場合、それが非対称であっても、また、調和振動子のポテンシャルでなくとも、さらにはもっと複雑な形状であっても、全エネルギーがポテンシャルより大きい領域に質点が閉じ込められ周期的な運動（振動）をすることがわかる。

3.5.3 束縛状態のポテンシャルにおける振動周期

3.5.2で扱ったような１次元ポテンシャルがあって、周期的な運動をする場合、**運動方程式を解くことなしに、その周期を求めることができる**。周期を求めるには以下のように力学的エネルギー保存則を積分すれば良い。

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + U(x) = E$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} = dt \qquad (3\text{-}5\text{-}7)$$

質点が前のページの図でA点(t=0)からB点(t=t)まで運動するのに必要な時間は、(3-5-7)式を積分して、

$$\int_A^B \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} = \int_0^t dt = t \qquad (3\text{-}5\text{-}8)$$

で求まる。周期は2tであるから、

$$\text{周期}\quad T' = 2t = \sqrt{2m}\int_A^B \frac{dx}{\sqrt{(E - U(x))}} \qquad (3\text{-}5\text{-}9)$$

この式に、全エネルギーと運動領域を入れれば、任意の形の$U(x)$に対して周期が計算できる[2]。例えば、$E = \frac{1}{2}kA^2,\ U(x) = \frac{1}{2}kx^2, -A \le x \le A$ を (3-5-9)に代入して積分をすれば、１次元調和振動子の周期 $T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ が求まる[3]。

---

[2] これは、あくまでも形式解である。実際に周期を求めるためには、与えられたU(x)に対して(3-5-9)式の積分を実行する必要がある。ポテンシャルが複雑な形をしていれば、積分が初等的に求まらない事もあるが、「数値計算」を行えば周期を得る事が可能である。

[3] 演習。もちろん、運動方程式から得られた値と同じ結果になる。

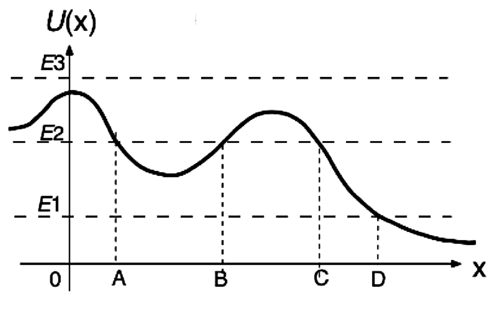
演習6

1. 質量mの質点が、$U(x)=\frac{1}{4}Dx^4$ （Dは正の定数）なるポテンシャルの場の中で１次元運動をするとしよう。このとき、

(1) このポテンシャルに対応する力を求めよ。
(2) $x=A$ の点で静かに質点を離した。全力学的エネルギーはいくらか。
(3) 質点はその後、どのような運動をするかをのグラフを書いて論じたい。以下の設問に答えよ。

a. $U(x)=\frac{1}{4}Dx^4$のグラフを書きなさい（概略で良い）。ある点 x において、全エネルギー、運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーに対応するのはどの部分かグラフに書き込め。
b. それらの物理量は x でどう変わるか述べよ。
c. 質点が受ける力が x でどう変わるかを、$U(x)$ 曲線の傾きとの関係から述べよ。
d. x で速度はどう変わるか。（静止する点、速さが一番大きくなる点は？、そのときの速さは？）
e. この質点の運動が振動かどうかを判定しなさい。
f. もし、このポテンシャルの $x<0$ での形が正の領域と異なった傾きになっていた場合（例えば、$x<0$ で　$U(x)=\frac{1}{2}Kx^2$ ）、この質点の運動はどう変わるか。

2. 図のような１次元のポテンシャルの場 $U(x)$ があったとする。
力学的エネルギーEがE1、E2、E3の場合の運動を以下の問いに従って論ぜよ。
（図には書いていないが $x\to\pm\infty$ で $U(x)$は単調に０に向かうとする）
(1)E = E1の場合、運動可能な領域はどこか。＋∞からやってきた粒子の運動について述べよ。
(2)E = E2の場合、運動可能な領域はどこか。それらの領域での運動について述べよ。
(3)E = E3の場合、運動可能な領域はどこか。＋∞からやってきた粒子の運動について述べよ。



3. １次元の調和振動子の周期 T' をポテンシャルの積分から求める。ただし、バネ定数をk 質点の質量をmとする。
(1) 次の積分 I の値が πであることを示せ。（ヒント：$x=A\sin\theta$ と置く。ただし、$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ ）

$$I=\int_{-A}^{+A}\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}\qquad(3\text{-}5\text{-}10)$$

(2) (3-5-9)式　$T'=\sqrt{2m}\int_A^B\frac{dx}{\sqrt{(E-U(x))}}$　を計算して、周期が $T'=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ と求まることを確かめよ。